

مدل سازی برهمکنش تایر - خاک به روش اجزای محدود غیر خطی با استفاده از نرم افزار متلب

سعادت کامگار^۱، علی رضایی^۲، محمد معراجی^۳

۱. استادیار، گروه مکانیک بیوسیستم دانشگاه شیراز

۲. دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم دانشگاه شیراز

۳. دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم دانشگاه شیراز

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۷/۱۰ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۵/۸/۲۲)

چکیده

در این پژوهش مدل برهمکنش جدیدی از تایر- خاک با نگاهی خاص به مدل اجزای محدود دو بعدی رشته‌های مقاوم تایر شبیه‌سازی شد. هدف در این مدل جدید، در مقایسه با سایر مدل‌های موجود، یافتن یک رابطه‌ی ریاضی برای کل تایر نبوده، بلکه اجزای اصلی ساختار مکانیکی تایر مبنای کار قرار گرفته و نحوه‌ی مدل‌سازی الیاف مقاوم تایر به عنوان پیچیده‌ترین بخش مدل اجزای محدود دو بعدی با بیان جزئیات ارائه گردید. همچنین بازسازی مدل دیواره‌ی تایر به عنوان یک ماده‌ی ابرالاستیک و مدل خاک نیز به عنوان یک ماده‌ی الاستوپلاستیک مورد بررسی قرار گرفت. به منظور انجام یک شبیه‌سازی مؤثر، ضرایب مکانیکی خاک لوم- سیلتی به دقت اندازه‌گیری شدند. نتایج برنامه‌نویسی در نرم‌افزار MATLAB7 نشان داد که تایر رادیال نسبت به تایر بایاس در شرایط یکسان بر روی خاک لوم- سیلتی دارای بازده کششی بالاتری بود. در زمانی که نیروی کشش خالص برای هر دو تایر یکسان بود، در تایر بایاس نسبت به تایر رادیال کاهش حرکت (لغزش) بیشتری واقع شد و نیروی کشش ناخالص نیز اندکی افزایش یافت. همچنین نتایج شبیه‌سازی و آزمایش‌ها نشان دادند که تایر رادیال نسبت به تایر بایاس بر روی خاک لوم- سیلتی در شرایط یکسان دارای مقاومت غلتشی کمتری بود. بر اساس نتایج شبیه‌سازی، تأثیر لغزش، فشار باد و سختی مکانیکی خاک بر روی بازده کششی به طور رضایت بخشی پیش‌بینی شد. نتایج شبیه‌سازی تایر- خاک که با نتایج آزمایش‌های عملی مقایسه گردید، تأییدکننده‌ی قابلیت‌های این مدل‌سازی عددی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: برهمکنش تایر - خاک، روش اجزای محدود، ابرالاستیک، الاستوپلاستیک، نرم‌افزار MATLAB

مقدمه

(Thompson, 2005). در این میان روش‌های عددی که روش

اجزای محدود^۵ یکی از نمونه‌های آن می‌باشد به دلیل پیشرفتی که رایانه‌های شخصی در حل مسائل بزرگ ریاضی در زمان کوتاه داشته‌اند توانسته است توجه برخی محققین بخش مکانیک خاک را به خود جلب کند و آنان توانسته‌اند مدل‌های خوبی از برهمکنش تایر و خاک به روش اجزای محدود ارائه کنند.

مدل‌سازی مسأله برهمکنش تایر و خاک از سه بخش تشکیل شده که عبارتند از مدل‌سازی تایر، خاک و الگوریتم تماس^۶ که برای رسیدن به یک پاسخ قابل قبول باید به طور همزمان هر سه مورد را در نظر داشت.

متأسفانه علی‌رغم تلاش‌هایی که در سال‌های اخیر در مورد مسأله مدل‌سازی برهمکنش تایر و سطح صلب انجام شده

مسأله برهم‌کنش^۱ تایر و خاک یکی از موضوعات مهم پژوهشی برای خودروسازان و محققین بخش مکانیک خاک می‌باشد (Wong, 2001). در گذشته تحقیقاتی در این زمینه صورت گرفته و بسته به اهداف مورد نیاز و فرض‌های ساده‌کننده‌ی مسأله برهمکنش تایر و خاک شبیه‌سازی شده و اغلب با تغییر پارامترهای موثر بر عملکرد شبیه‌سازی تا حدی خواسته‌های مورد نیاز بهینه شدند (Gillespie, 1992; Limpert, 1992).

برای بررسی هر پدیده‌ای ابتدا باید مدلی ریاضی از رفتار آن را ایجاد شود تا بتوان آن را تجزیه و تحلیل و سپس بهینه‌سازی کنیم (Stoer & Bulirsch, 1993). به طور کلی سه روش برای این مدل‌سازی وجود دارد که به ترتیب عبارتند از روش تحلیلی دقیق^۲، روش تجربی^۳ و روش عددی^۴

3. Experimental method
4. Numerical solution
5. Finite element method
6. Contact algorithm

* نویسنده مسئول : alirezaei59@yahoo.com

1. Interaction
2. Exact solution

دلیل است که غالب مدل‌های عددی، تاپر را بدون در نظر گرفتن آج مدل‌سازی کرده یا برای در نظر گرفتن آج، ضرایبی فرض کرده و این ضرایب را در مدل‌سازی دخالت می‌دهند. فرض صاف بودن آج تاپر با توجه به انتشار مقالاتی که تأثیر آج تاپر بر کشش را مطرح می‌کنند با واقعیت فاصله دارد و استفاده از ضرایبی برای در نظر گرفتن آج شاید تنها راه نزدیک شدن به نتیجه‌ای نسبتاً مناسب باشد (Cui *et al.*, 2007). اگر خاک با فرض غیرپیوسته و با روش اجزای گسسته^{۱۰} مدل‌سازی گردد؛ می‌توان آج تاپر را نیز در نظر گرفت (Nakashima & Oida, 2004). از میان اجزای تشکیل دهنده تاپر، حجم هوای درون تاپر و الیاف مقاوم تاپر نقش مؤثرتری در رفتار دینامیکی و تغییر شکل تاپر ایفا می‌کنند (Fervers, 2004). فشار درون تاپر همان‌طور که در شکل (۱-ب) هم نشان داده شده است، باعث ایجاد کشش در رشته‌های مقاوم تاپر شده و وزن تاپر نیز توسط همین نیروهای کششی تحمل می‌شود.

برخی از ضرایبی که برای تاپر در نظر گرفته می‌شوند باید به صورت عملی آزمایش و تایید گردند؛ چرا که ممکن است در شرایط واقعی ضرایب در نظر گرفته شده اندکی خطا داشته باشند. برخی از آزمایش‌ها به خواص دینامیکی تاپر مربوط می‌شوند. باید توجه داشت که خصوصیات دینامیکی تاپر نقش اصلی در ایجاد توان حرکت، نیروی گیرایی و ترمزی خودرو داشته و نیروی مورد نیاز برای هدایت مسیر حرکت خودرو را تأمین می‌کند (Matschinsky, 1998). Pacjeka با اندازه‌گیری ۳۲ پارامتر از تاپر و جای‌گذاری در یک رابطه‌ی نسبتاً پیچیده مدل دینامیکی جامعی را برای خودروسازان معرفی کرد. این مدل‌های دقیق ارائه شده قادرند تغییر شکل و مقدار نیروی جانبی را نیز نشان دهند (Limpert, 1992).

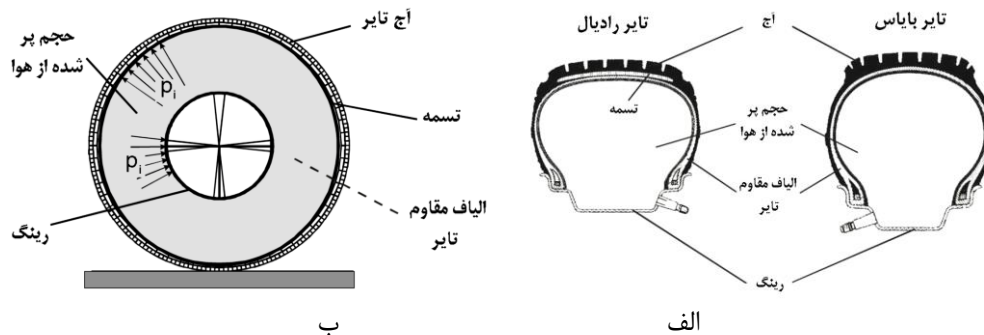
با وجود اینکه هم اکنون در روش اجزای محدود جهت مدل‌سازی اجسام با محیط پیوسته‌ی خطی دارای تماس، تئوری‌هایی ارائه شده است، ولی در محیط غیرخطی محدودیت‌ها همچنان وجود دارند. اما راه‌حل‌های پیچیده‌ای که به صورت الگوریتم بیان شده همچنان برای حل مسأله‌ی تماس دو جسم غیر خطی به کار می‌رود. در تماس دو جسم باید شرایط عدم نفوذ^{۱۱} همواره رعایت شود و این به معنی آن است که نواحی تماس یک جسم قادر به ورود به درون مرز جسم دیگر نیستند (Aliabadi & Brebbia, 1993; Belytschko, 2000). این در حالی است که بیان رابطه‌ای برای این خاصیت کار دشواری بوده و نیاز است تا فرض‌های ساده‌سازی متعددی بکار گرفته شود.

در زمینه‌ی تاپر و خاک نتایج کمی ارائه شده که شاید علت اصلی آن، طبیعت پیچیده‌ی ترکیبی (Matthews *et al.*, 2001; Reddy, 2004) ابرالاستیک^۱ تاپر (Hofstetter *et al.*, 2006) و حل هم‌زمان با رفتار غیرخطی^۲ و تراکم‌پذیر^۳ الاستوپلاستیک^۴ خاک باشد (Mulungye *et al.*, 2007). ویژگی مسأله برهم‌کنش تاپر و خاک این است که عملکرد تاپر و رفتار خاک هم‌زمان بررسی می‌شوند. بنابراین جهت بهینه‌سازی، پارامترهای عملکرد تاپر و خاک هم‌زمان به کار گرفته می‌شوند که این امر موجب زمان‌بری زیاد خواهد شد. بسیاری از محققین به منظور کاهش زمان حل مسأله، سعی در ساده‌سازی و کاهش پارامترها داشته‌اند. این ساده‌سازی‌ها در برخی موارد موجب کاهش دقت یا افزایش خطای مدل‌سازی می‌شود. ساده‌سازی‌ها بیشتر در مورد تاپر به چشم می‌خورد زیرا غالباً ساختار پیچیده‌ی تاپرهای سه بعدی به صورت دو بعدی مدل‌سازی می‌شوند. در این مدل‌ها تغییرات جابه‌جایی و نیرویی در عرض تاپر دیده نمی‌شوند. همچنین برای تغییرات عمودی نیز اتخاذ فرض‌های مناسب ضروری می‌باشد (Cui *et al.*, 2007). تاپر از چهار بخش اصلی تشکیل شده که عبارتند از: آج^۵، حجم پر شده از هوا^۶، الیاف مستحکم درون تاپر^۷ و رینگ^۸ (شکل ۱-الف). در پژوهش‌هایی که تاپر به صورت دو بعدی مدل‌سازی شده است، اگر فرض‌های اصلاح‌کننده در طی مدل‌سازی در نظر گرفته نشود، این فرض منجر به پاسخ‌های نادرست خواهد شد. علت اصلی وجود ساختار پیچیده‌ی سه بعدی تاپر است، زیرا تاپر در راستای محور دوران خود ساختاری غیریکنواخت دارد و این ساختار غیریکنواخت با بافت ترکیبی ناهمگن^۹ همراه بوده که فرض دو بعدی بودن تاپر را غیرممکن نشان می‌دهد. در مدل دو بعدی می‌توان آج تاپر را حذف کرد، بخش‌های پر شده از هوا و رشته‌های تاپر به شکلی خاص در هم ادغام نمود و به شکل مناسبی مدل دو بعدی تاپر را بهبود داد (Fervers, 2004). باید توجه داشت که در شرایط واقعی که آج‌های تاپر با سطح خاک تماس پیدا می‌کنند بسیاری از مدل‌های عددی که با فرض پیوستگی مواد شبیه‌سازی به وجود آمده‌اند، توانایی مدل‌سازی و حل معادلات در لبه‌های نوک تیز آج را ندارند (Nakashima & Oida, 2004)؛ به همین

1. Hyper elastic
2. Nonlinear behavior
3. compressible
4. Elastoplastic
5. Tread
6. Air-filled volume
7. Carcass
8. Rim
9. Heterogeneous

10. Discrete element method

11. Impenetrability



شکل ۱. الف- اجزای تشکیل دهنده تایر؛ ب- المان های تایر دوبعدی

با مقدار کار خارجی است که بر روی ماده انجام می شود. نتیجه آن که مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در آج تایر به صورت دو بعدی مطابق رابطه (۱) می باشد (Regli et al., 1993).

$$W = \frac{1}{2} \int_A [\{\sigma\}^T \{\varepsilon\}] dA \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در این رابطه: A : مساحت مقطع ماده؛ σ : تنش عمودی؛ $\{\sigma\}^T$: ترانهاده ماتریس تنش عمودی؛ ε : کرنش عمودی و W : مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در آن می باشد. تانسورهای تنش و کرنش در رابطه (۱) به صورت رابطه های (۲) و (۳) می باشند (Regli et al., 1993):

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz}\} \quad (\text{رابطه ۲})$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}\} \quad (\text{رابطه ۳})$$

به دلیل بزرگ بودن مقدار تغییر شکل ها، دیگر نمی توان از تانسور کرنش بی نهایت کوچک استفاده نمود و علاوه بر آن در تعریف معادله ساختاری نیز بزرگ بودن تغییر شکل وارد می شود. به طور تجربی و با انجام آزمایش های مختلف که در مدل سازی تایر به خصوص در تایرهای خودروهای سواری که در آن ها دقت مورد انتظار بیشتر می باشد؛ از میان مدل های مختلف، مدل مونی- رولین^۴ پاسخ مناسب تری نسبت به بقیه مدل ها دارد بنابراین انرژی پتانسیل کرنشی برای حالت دو پارامتری به صورت رابطه (۴) می باشد (Regli et al., 1993).

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (\text{رابطه ۴})$$

در این رابطه d ، C_{01} ، C_{10} ثابت های مادی، I_1 ، I_2 نامتغیرهای اول و دوم و J ژاکوبین تانسور تغییر شکل می باشند. کار خارجی وارد بر ماده از دو بخش کار ناشی از نیروهای حجمی (W_{body}) و کار ناشی از نیروهای مرزی (W_{surf}) تشکیل شده که طبق رابطه های (۵) و (۶) می باشند:

با توجه به مطالعات انجام شده از سویی و کمبود منابع اطلاعاتی در داخل کشور از سوی دیگر، تحقیقی با هدف مدل سازی تماس بین تایر و خاک به روش المان محدود غیرخطی با استفاده از نرم افزار متلب سپس تعیین نیروی کشش دو نوع تایر رادیال و بایاس مشخص بر روی سطح خاک معلوم و ارزیابی آن با نتایج آزمایش کشش تایر در انباره خاک^۱ اجرا گردید.

مواد و روش ها

در این پژوهش تایر به صورت دو بعدی مدل سازی شده، تجزیه و تحلیل برهمکنش یا اثر متقابل تایر دو بعدی و خاک بر یکدیگر به روش اجزای محدود، به صورت ذیل انجام گردید: ۱- مدل سازی نرم افزاری تایر به روش المان محدود غیرخطی در نرم افزار متلب^۲. این مدل چون بیانگر جسم ابرالاستیک می باشد، قابلیت تغییر شکل پذیری تایر بر روی سطح صلب و سطح تغییر شکل پذیر را دارا می باشد؛ ۲- مدل سازی نرم افزاری خاک به روش المان محدود غیرخطی در نرم افزار متلب. این مدل خاک به عنوان یک ماده الاستوپلاستیک می باشد. این مدل نه تنها در مسائل برهمکنش تایر و خاک بلکه در مدل سازی هر آنچه که بر روی خاک استقرار می یابد کاربرد دارد؛ ۳- مدل سازی تماس بین تایر و خاک و تعیین نیروی کشش یک تایر مشخص بر روی سطح خاک معلوم و ارزیابی آن با نتایج آزمایش کشش تایر در انباره خاک؛ ۴- پیش بینی مقدار تراکم خاک و نواحی تراکم یافته بعد از عبور تایر از روی خاک و ارزیابی آن با نتایج حاصل از سامانه نفوذسنج^۳.

در روابطی که برای مواد غیرخطی به کار می روند، در غالب موارد از اصل کار مجازی استفاده شده است. با استفاده از این اصل، تغییر مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در ماده، برابر

1. Soil bin
2. MATLAB
3. Penetrometer

4. Mooney- Rivlin model

پلاستیک همواره در جهت عمود بر سطح تسلیم می‌باشد. در نتیجه می‌توان رابطه‌ی (۱۱) را نشان داد:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} \quad (\text{رابطه ۱۱})$$

در این رابطه، σ'_{ij} برابر با مقدار تنش انحرافی می‌باشد. با استفاده از روابط قبل رابطه‌ی حاکم بر خاک پلاستیک به صورت رابطه (۱۲) تعیین می‌شود:

$$d_{\varepsilon ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\theta}{E} \delta_{ij} d_{\sigma kk} + d\lambda \sigma'_{ij} \quad (\text{رابطه ۱۲})$$

معیار تسلیم در بارگذاری چند محوره تنش که معرف سطح تسلیم است، تابعی از تنش‌های اصلی می‌باشد:

$$\sigma_e = f[\{\sigma\}] \quad (\text{رابطه ۱۳})$$

در صورت فراتر رفتن تنش معادل محاسبه شده در حل الاستیک از تنش تسلیم، کرنش پلاستیک ظاهر خواهد شد. در این حالت، کرنش پلاستیک مقدار تنش را طوری کاهش می‌دهد که معیار تسلیم همواره ارضا شود. معیار تسلیم برای نمونه‌ی خاک از مدل دراکر-پراگر^۳ استفاده شده است. این معیار برای حالت قانون جریان مرتبط^۴ یا غیرمرتبط^۵ پیش‌بینی شده است. با افزایش معیار تسلیم سطح تسلیم تغییر نخواهد کرد، لذا ماده از قانون سخت‌شوندگی تبعیت نخواهد کرد و از نوع الاستیک-پلاستیک کامل در نظر گرفته می‌شود. تنش معادل (σ_e) در این حالت طبق رابطه (۱۴) بیان می‌گردد (Owen & Hinton, 1986).

$$\sigma_e = 3\beta\sigma_m + \left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5} \quad (\text{رابطه ۱۴})$$

در این رابطه ماتریس M تغییرات تنش تسلیم را با جهت آن بیان می‌کند، σ_m تنش هیدرواستاتیک، S تنش انحرافی، $\{S\}^T$ ماتریس ترانپوز تنش انحرافی و β ثابت مادی بوده که از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آید:

$$\beta = \frac{2\sin(\varphi)}{\sqrt{3}(3-\sin(\varphi))} \quad (\text{رابطه ۱۵})$$

در این رابطه φ زاویه‌ی اصطکاک داخلی می‌باشد. اگر تنش معادل که از رابطه‌ی (۱۴) حاصل می‌گردد، از تنش تسلیم که در معیار دراکر-پراگر از رابطه (۱۶) به دست می‌آید، بیشتر گردد؛ آنگاه خاک از خود رفتار پلاستیک نیز نشان خواهد داد.

$$\sigma_y = \frac{6C \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{3}(3-\sin(\varphi))} \quad (\text{رابطه ۱۶})$$

که در آن C ضریب هم‌چسبی^۶ می‌باشد. تابع تسلیم که مقدار آن بر روی مرز تسلیم برابر صفر است، به صورت رابطه‌ی

$$W_{body} = \int_A \{u\}^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dA = \int_A \{U\}^T [N]^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dA \quad (\text{رابطه ۵})$$

$$W_{surf} = \int_L \{u\}^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} dL = \int_L \{U\}^T [N]^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} dL \quad (\text{رابطه ۶})$$

در این روابط u بردار تغییر مکان، U تغییر مکان پیوسته، ماتریس تابع‌های داخلی، b_x, b_y نیروهای حجمی در راستای x و y ، A مساحت جسم، L طول مرز جسم و P_x, P_y نیروهای اعمال شده به مرز جسم در راستای x و y می‌باشند. تابع انرژی پتانسیل ماده به صورت رابطه‌ی (۷) تعریف می‌شود:

$$\pi = W - W_{body} - W_{surf} \quad (\text{رابطه ۷})$$

طبق اصل بقای انرژی در محیط‌های پیوسته مقدار π همواره ثابت است، از این‌رو با مشتق‌گیری، صفر شده و معادله‌ی حاکمه ماده‌ی ابرالاستیک آج تاپر تعیین می‌شود (Bonet & Wood, 1997).

خاک در این شبیه‌سازی به عنوان یک ماده‌ی الاستوپلاستیک مستقل در نظر گرفته شده است و با رسیدن به سطح تنش تسلیم، کرنش برگشت‌ناپذیر در آن اتفاق می‌افتد. کرنش پلاستیک^۱ در این حالت به مقدار تنش اعمالی و تنش-های اعمال شده‌ی قبل بستگی دارد. پس از گذر از تنش تسلیم، بخشی از رفتار خاک الاستیک و بخشی دیگر پلاستیک می‌باشد، از این‌رو مطابق رابطه (۸) در طی نمو کرنش، تغییر کرنش قابل تقسیم به دو مؤلفه‌ی الاستیک $(d_{\varepsilon ij})_e$ و پلاستیک $(d_{\varepsilon ij})_p$ می‌باشد.

$$d_{\varepsilon ij} = (d_{\varepsilon ij})_e + (d_{\varepsilon ij})_p \quad (\text{رابطه ۸})$$

نمو کرنش الاستیک از طریق رابطه (۱) با نمو تنش مرتبط می‌باشد. با توجه به اینکه تنش از دو بخش همگن (هیدرواستاتیک) و ناهمگن^۲ تشکیل شده است، نمو کرنش الاستیک طبق رابطه (۹) بیان می‌شود:

$$(d_{\varepsilon ij})_e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\theta}{E} \delta_{ij} d_{\sigma kk} \quad (\text{رابطه ۹})$$

در این رابطه، E, θ به ترتیب ضریب پواسون و مدول الاستیک خاک می‌باشند. نمو کرنش پلاستیک نیز متناسب با مقدار پتانسیل پلاستیک Q بر گرادیان تنش می‌باشد (رابطه ۱۰):

$$(d_{\varepsilon ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

در این رابطه، λ ضریب پلاستیک و Q پتانسیل پلاستیک و معرف جهت کرنش پلاستیک می‌باشد. در صورتی که تابع پتانسیل پلاستیک به عنوان سطح تسلیم انتخاب شود، قانون جریان از نوع مرتبط بوده که در این حالت جهت کرنش

3. Drucker-Prager model
4. Associated flow rule
5. Nonassociated flow rule
6. Cohesion

1. Plastic
2. Deviatoric

برای حل باید رابطه‌ی خطی شده‌ی (۱۹) یا (۲۰) به ازای x_0 فرضی حل شود و سپس (x_1, x_2, \dots) به دست آید و مقادیر F و R اصلاح شوند. این عملیات تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که مقدار تعیین شده‌ی مجاز از مقدار $\|R\|/\|F\|$ بزرگتر شود.

جهت تعیین رابطه‌ی اجزای محدود برای خاک ابتدا باید وضعیت الاستیک یا پلاستیک خاک تعیین شود؛ که این کار از طریق محاسبه‌ی تنش تسلیم (σ_y) در هر گام افزایش بار و با استفاده از رابطه‌ی (۱۶) در المان تعیین می‌شود. تنش‌های ایجاد شده‌ی درون خاک نیز بر اساس کرنش آزمون (ϵ^{tr}) محاسبه می‌شود. مطابق رابطه (۲۱) کرنش آزمون تفاضل بین کرنش پلاستیک در نمو قبلی و کرنش کل می‌باشد. تنش آزمون نیز به صورت رابطه (۲۲) تعیین می‌شود؛ که در آن $[D]$ ماتریس تنش- کرنش خاک می‌باشد (Bonet & Wood, 1997).

$$\{\epsilon_n^{tr}\} = \{\epsilon_n\} - \{\epsilon_{n-1}^{pl}\} \quad \text{(رابطه ۲۱)}$$

$$\{\sigma^{tr}\} = [D]\{\epsilon^{tr}\} \quad \text{(رابطه ۲۲)}$$

در صورتی که تنش معادل (σ_e) کمتر از (σ_y) باشد، خاک الاستیک است و نمو کرنش پلاستیک صفر است. اما در صورتی که از تنش تسلیم فراتر رود، خاک وارد مرحله‌ی پلاستیک شده و نمو کرنش پلاستیک از رابطه‌ی (۲۳) تعیین می‌شود؛ که در آن ضریب پلاستیک (λ) توسط فرآیند تکرار شونده نیوتن-رافسون از رابطه‌ی (۲۴) تعیین می‌شود:

$$d\epsilon^{pl} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad \text{(رابطه ۲۳)}$$

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M][D]\{d\epsilon\}}{-\left\{ \frac{\partial F}{\partial K} \right\} \{\sigma\}^T [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M][D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad \text{(رابطه ۲۴)}$$

با تعیین نمو کرنش پلاستیک، مقدار اصلاح شده‌ی کرنش پلاستیک با استفاده از رابطه‌ی (۲۵) حاصل می‌شود. کرنش الاستیک نیز با استفاده از رابطه‌ی (۲۶) محاسبه می‌گردد. نهایت بردار تنش به صورت رابطه (۲۷) قابل محاسبه می‌باشد.

$$\{\epsilon_n^{pl}\} = \{\epsilon_{n-1}^{pl}\} + \{\Delta\epsilon^{pl}\} \quad \text{(رابطه ۲۵)}$$

$$\{\epsilon^{el}\} = \{\epsilon^{tr}\} - \{\Delta\epsilon^{pl}\} \quad \text{(رابطه ۲۶)}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon^{el}\} \quad \text{(رابطه ۲۷)}$$

برای قانون جریان پلاستیک غیر مرتبط، ماتریس تنش کرنش الاستوپلاستیک غیر متقارن خواهد بود. برای متقارن نمودن ماتریس در روش دراکر- پراگر، این ماتریس برای قانون جریان مرتبط یک بار حساب می‌گردد. سپس در حالت قانون

(۱۷) تعریف می‌شود.

$$F = 3\beta\sigma_m + \left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5} - \sigma_y = 0 \quad \text{(رابطه ۱۷)}$$

با مشتق‌گیری از تابع تسلیم، مرز تسلیم به صورت

رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \beta [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + \frac{1}{\left[\frac{1}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{0.5}} \{S\} \quad \text{(رابطه ۱۸)}$$

با تعیین مرز تسلیم، محدوده‌ای از خاک که رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهد، مشخص می‌گردد. با استفاده از رابطه‌ی (۹) برای مدل‌سازی رفتار بخش الاستیک و رابطه‌ی (۱۲) برای مدل‌سازی رفتار بخش پلاستیک، معادله‌ی حاکم بر رفتار مکانیکی خاک کامل می‌شود (Owen & Hinton, 1986).

رابطه‌ی اجزای محدود

با مشتق‌گیری سویی از رابطه‌ی (۷) در راستای خطوط واصل گره‌های هر المان از ماده‌ی ابر الاستیک آج، معادله‌ی اجزای محدود آن به دست می‌آید (رابطه ۱۹).

$$K(x_k)u = -R(x_k) = -T(x_k) + F(x_k) \quad \text{(رابطه ۱۹)}$$

x_k مختصات فعلی گره‌های آج تایلر است که k بار تحت الگوریتم نیوتن-رافسون اصلاح شده است. با تعیین مقدار جایجایی (u) در رابطه‌ی فوق، مقدار x_{k+1} نیز به صورت $(x_{k+1} = x_k + u)$ تعیین می‌شود. F و T به ترتیب نیروهای معادل بیرونی و درونی وارد بر آج در موقعیت جاری گره‌ها می‌باشند. درایه‌های ماتریس سختی $[K]$ به صورت رابطه (۲۰) تعیین می‌گردد:

$$K_{ab}^{(e)} = K_{c,ab}^{(e)} + K_{\sigma,ab}^{(e)} - K_{p,ab}^{(e)} = \left(\int_{A^{(e)}} \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} c_{ijkl}^{sym} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} dA \right) + \left(\int_{A^{(e)}} \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} \delta_{ij} dA \right) - \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_\xi} p \frac{\partial x_{(\xi,n)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \eta} N_a \right) d\xi \right) + \left(\frac{1}{2} \int_{\Gamma_\xi} p \frac{\partial x_{(\xi,n)}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \xi} N_a \right) d\xi \right) \quad \text{(رابطه ۲۰)}$$

در این روابط، a و b شماره‌ی دو گره مجاور در المان آج؛ N_i ها توابع شکل؛ $A^{(e)}$ مساحت المان e ؛ η, ξ دو بردار مبنای عمود بر هم در المان اصلی؛ Γ_ξ مرز المان اصلی که بردار ξ می‌باشد؛ c_{ijkl}^{sym} تانسور متشکله خلاصه شده؛ σ تنش کوشی؛ $x_{(\xi,n)}$ تابع درونی‌یابی بر روی سطح المان و P فشار هیدرواستاتیک می‌باشند. ماتریس سختی کل که در رابطه‌ی (۲۰) نشان داده شده است، از سه بخش مؤلفه‌ی متشکله، مؤلفه‌ی تنش اولیه و مؤلفه‌ی نیروی خارجی تشکیل شده است.

جریان غیر مرتبط نیز حساب شده و سپس از دو ماتریس به دست آمده میانگین گیری می شود (Owen & Hinton, 1986).

برای مدل سازی تماس در این شبیه سازی از روش ضریب لاگرانژ استفاده شده است. در این رهیافت با مقایسه ی فاصله ی دو گره که قرار است با هم تماس ایجاد کنند، یک المان دو گره ای ساده در نظر گرفته می شود که در هنگام تماس دارای طول صفر یا منفی خواهند شد. این طول، ضریب لاگرانژ نامیده می شود و در معادله ی دینامیکی اعمال می شود. این معادله با روش تکرار نیوتن-رافسون^۱ حل می شود (Aliabadi & Brebbia, 1993; Zienkiewicz & Taylor, 2000).

آزمایش های تجربی

در این پژوهش، دو تایر بدون آج رادیال و بایاس مورد بررسی قرار گرفت (جدول ۱). به طور کلی این آزمایش ها شامل چهار بخش اصلی ۱- آزمایش تایر توسط سامانه آزمونگر تک چرخ، ۲- اندازه گیری ضرایب خاک، ۳- اندازه گیری مقدار تراکم خاک بعد از عبور تایر و ۴- اندازه گیری مقادیر تغییر شکل تایر و خاک بود.

سامانه آزمونگر تک چرخ دو بخش مهم وضعیت حرکتی تایر و نیروهای وارد بر تایر را اندازه گیری می کند. اندازه گیری وضعیت حرکتی شامل اندازه گیری سرعت خطی و سرعت

1. Newton-Raphson Procedure

جدول ۱. مشخصات اندازه گیری شده ی تایرهای مورد آزمایش

نوع تایر	شماره تایر	شرکت سازنده	قطر خارجی	قطر رینگ	پهنای حداکثر	پهنای رد اثر چرخ	جرم تایر و رینگ
رادیال	165 R 13	دنا	583 mm	13 اینچ	165 mm	135 mm	12 Kg
بایاس	5.60 - 13	دنا	577 mm	13 اینچ	165 mm	103 mm	12 Kg



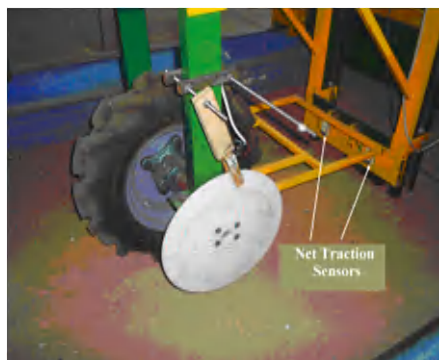
ب

الف

شکل ۲- الف- صفحه مدور و حسگرها جهت اندازه گیری سرعت دورانی؛ ب- ریل حمل مکانیزم چرخ و خط کش شیاردار کناری، جهت اندازه گیری سرعت خطی



ب



الف

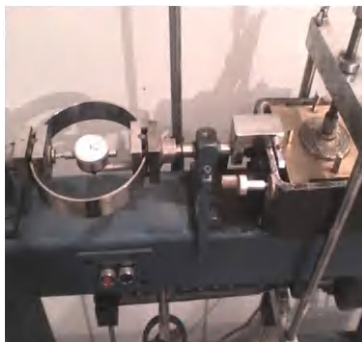
شکل ۳. الف- حسگرهای اندازه گیری نیروی کشش خالص؛ ب- موتور محرک و حسگر اندازه گیری نیروی کشش ناخالص

تنش- کرنش خاک بر روی خاک مورد مطالعه قرار گرفت (شکل ۴).

به منظور انجام تحلیل صحیح و شبیه سازی خاک به روش اجزای محدود آزمایش های اندازه گیری چگالی و رطوبت، ضرایب هم چسبی و اصطکاک داخلی خاک و همچنین تعیین منحنی



ج



ب



الف

شکل ۴. الف- نمونه گیری از خاک؛ ب- اعمال نیرو بر روی خاک جهت تعیین ضرایب هم چسبی و اصطکاک داخلی خاک؛ ج- اندازه گیری منحنی تنش- کرنش خاک با استفاده از آزمون فشار تک محوری

کشاورزی ۱۰ تا ۳۰ درصد می باشد (Strivastava et al., 1993) که این مقدار برای تیره های غیر کشاورزی حدود ۴ درصد می باشد (Reimpell et al., 2001). به این ترتیب تغییر شکل اندازه گیری شده، برابر با حداقل مجاز برای تیره های کشاورزی است.

با قراردادن تایر بر روی یک سطح صلب و اعمال بار عمودی ۱۳۰ کیلوگرم بر روی تایر، با اندازه گیری اختلاف فاصله لبه رینگ تا سطح صلب، قبل و بعد از بارگذاری، شعاع لهیدگی چرخ به دست آمد. تغییر شکل یا نشست خاک بعد از عبور تایر از طریق اندازه گیری اختلاف سطح خاک تغییر شکل نیافته با حداکثر نشست رد تایر انجام گردید.

جدول ۲- خصوصیات فیزیکی و مکانیکی خاک مورد آزمایش

نتایج و واحدهای مربوطه	خصوصیات فیزیکی و مکانیکی اندازه گیری شده
۲۲۸/۴۲ گرم بر سانتی متر مکعب	وزن مخصوص
۳ درصد بر مبنای خاک خشک	درصد رطوبت
۲۶ درجه	ضریب اصطکاک داخلی خاک
صفر کیلو پاسکال	ضریب هم چسبی خاک

مقایسه میزان نشست خاک برای تایر رادیال و بایاس، نشان می دهد که در تایر بایاس نشست خاک بیشتر بوده است؛ که این امری طبیعی است زیرا با توجه به مشخصات تایرهای رادیال و بایاس که در جدول (۱) ارائه شده است، پهنای تایر

نتایج و بحث

آزمایش های انجام شده نشان داد که نوع خاک مورد آزمایش لوم- سیلتی با ۲۲٪ شن، ۵۳٪ سیلت و ۲۵٪ درصد رس می باشد. برای یک خاک لوم- سیلتی، ضریب الاستیک ۱۰ کیلو پاسکال و ضریب پواسن ۰/۳۰ می باشد (Das, 1982).

در این پژوهش تغییر شکل اندازه گیری شده ی هر دو تایر رادیال و بایاس تحت بار عمودی ۱۳۰ کیلوگرم برای هر دو تایر ۱۰ میلی متر و درصد تغییر شکل به ترتیب ۹/۴۳ و ۹/۸۰ درصد به دست آمده است. مقدار مجاز درصد تغییر شکل برای تایرهای

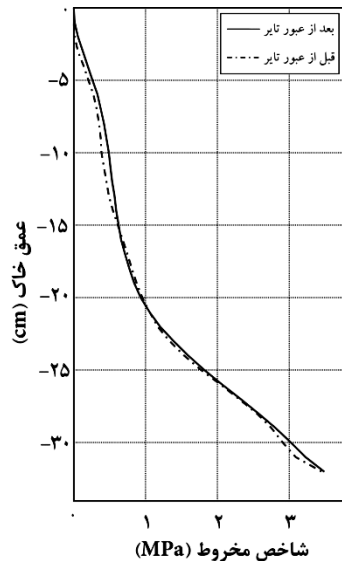
جدول ۳- مقادیر نشست خاک

نوع تایر	مقدار نشست شبه‌سازی شده (میلی‌متر)	متوسط مقدار نشست در شرایط تعادلی* (میلی‌متر)	در صد خطای شبه‌سازی
رادپال	۵/۱	۴/۶	۱۰/۶۷
بایاس	۶/۱	۵/۵	۱۰/۹۰

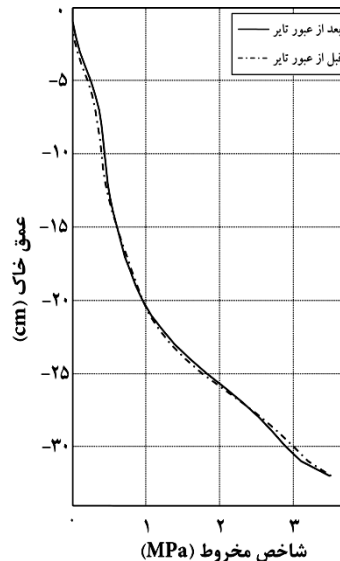
* منظور از شرایط تعادلی، ثابت شدن اندازه‌ی سرعت خطی تایر بعد از شتاب‌گیری اولیه و قبل از ترمزگیری انتهایی مسیر می‌باشد.

بایاس کمتر بوده، که این امر موجب کاهش سطح تماس بین تایر و خاک در نتیجه افزایش فشار تایر بر روی خاک و موجب افزایش نشست خاک گردیده است (جدول ۳).

نتایج آزمایش فشردگی خاک نشان داد که فشردگی خاک در عمق کمتر از ۱۵ سانتی‌متر ناچیز است (شکل ۵- الف و ب). از طرفی مشخص می‌گردد که تراکم خاک در زیر تایر بایاس بیشتر از تایر رادپال نسبت به حالت اولیه تغییر کرده است.



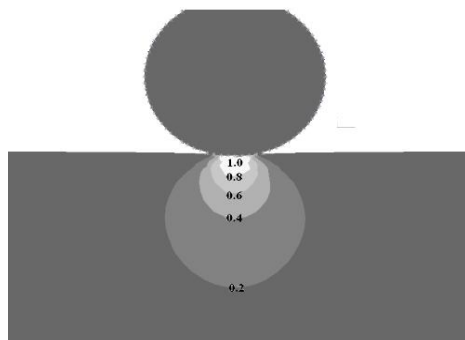
ب



الف

شکل ۵. نمودار فشار نفوذ مخروط نفوذسنج در خاک مورد آزمایش قبل و بعد از یک بار عبور تایر، الف- تایر رادپال، ب- تایر بایاس

نتایج شبه‌سازی تراکم خاک بعد از عبور تایر و خطوط تراز تنش ایجاد شده در حین قرار دادن تایر بر روی خاک در شکل ۶ مشاهده می‌گردد. مقدار تنش وان‌میسز^۱ ایجاد شده در خاک در قسمت تماس تایر به خاک بیشترین مقدار است؛ که با یافته‌های تجربی در مغایرت می‌باشد. علت اصلی این امر آن است که اگرچه تنش ایجاد شده در سطح خاک در حین حرکت تایر بیشتر است و حتی به طور موقتی لایه سطحی خاک متراکم‌تر می‌شود، ولی در قسمت انتهایی تایر و جایی که تایر در حال ترک کردن تماس خود با خاک است، خاک دچار به هم خوردگی شده و در آن سست‌سازی صورت می‌گیرد، در حالی که در لایه پایینی خاک این پدیده اتفاق نمی‌افتد. شکل خطوط تراز که در محاسبات اجزای محدود حاصل شد تا حدود زیادی با منحنی‌های تحلیلی بونسینسک^۲ مطابقت داشتند (Yong et al., 1978).

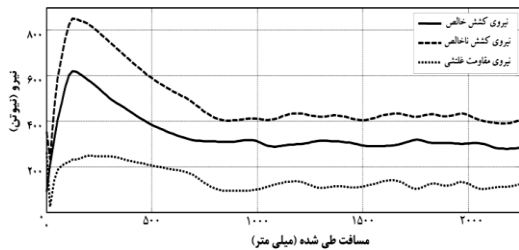


شکل ۶. نمایش خطوط تراز تنش ایجاد شده درون خاک

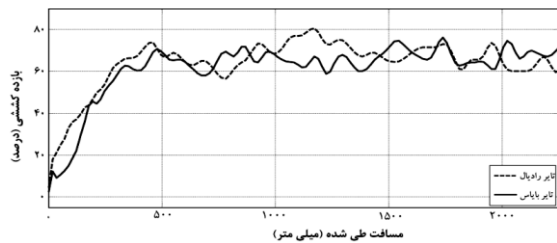
با توجه به اینکه در آزمایش به وسیله‌ی دستگاه آزمونگر تک چرخ، تایر توسط یک الکتروموتور شروع به چرخش می‌نماید ولی همچنان حرکت انتقالی تایر که بر روی یک شاسی سنگین قرار دارد، مقدار ناچیزی می‌باشد از این رو درصد لغزش تایرهای رادپال و بایاس در ابتدای مسیر حرکت از مقدار ۱۰۰ درصد اندازه‌گیری شده است که در نهایت به مقدار متوسط ۵/۵ درصد میل می‌نماید (شکل ۷).

1. Vonmises
2. Boonsinsuk

است. در ابتدای مسیر که نیرو و لغزش بیشتر وجود داشت بازده کشش کمتری بود. چون در این ناحیه لغزش بسیار بالا بود و بازده کشش در لغزش بالا، پایین است، در ابتدای کار بازده کششی پایین بود. در ادامه‌ی حرکت با وجودی که نیروی کشش خالص کاهش یافت ولی درصد لغزش نیز کاهش بیشتری داشت که موجب افزایش بازده کشش گردید.

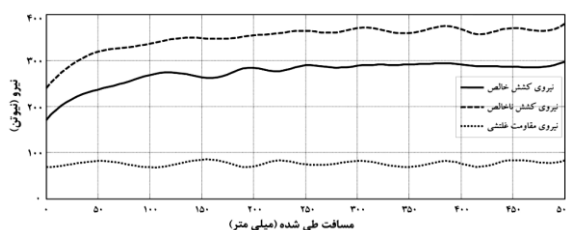


شکل ۹. نیروهای وارد بر تایر بایاس از زمان شروع تا انتهای مسیر

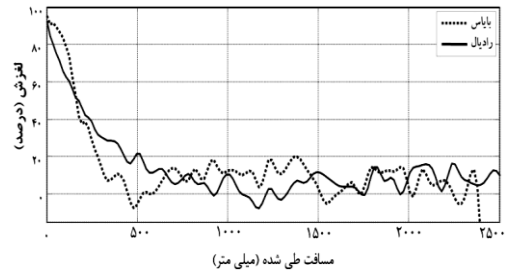


شکل ۱۰. بازده کشش تایرهای رادیال و بایاس از زمان شروع تا انتهای مسیر

مدلی که برای این شبیه‌سازی استفاده شد، یک مدل شبه استاتیکی بود. یعنی از اثر شتاب و نیروهای دینامیک صرف نظر و مسأله در شرایط پایدار حل شده است. سرعت خطی و سرعت دورانی تایر و در نتیجه مقدار لغزش تایر از ابتدا در برنامه تعریف شده‌اند. بنابراین در مدل اجزای محدود، تغییر سرعت وجود نداشته و نیروهای وارد بر تایر در یک شرایط پایدار محاسبه گردیده است. مقادیر نیرو با تعریف مقدار لغزش اولیه در برنامه تعیین شده است. برای مقایسه‌ی نتایج عملی با پاسخ برنامه، مقدار لغزش حدود ۵/۵ درصد که در شرایط پایدار ایجاد شده، استفاده گردیده است. مقادیر نیروی کشش ناخالص، نیروی کشش خالص و مقاومت غلتشی برای هر دو تایر رادیال و بایاس در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است.

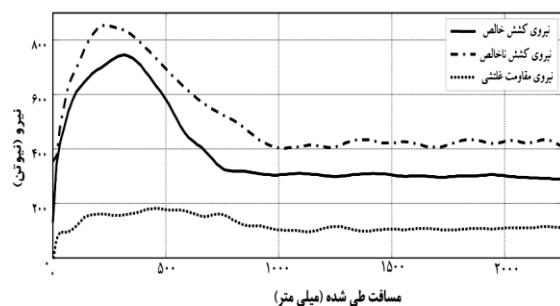


شکل ۱۱. نمودار نیروهای وارد بر تایر رادیال در حالت شبه استاتیکی



شکل ۷. درصد لغزش تایرهای رادیال و بایاس از زمان شروع تا انتهای مسیر

به طور کلی سه نیرو به تایر مورد آزمایش اعمال می‌شود. بزرگترین آن‌ها نیروی کشش ناخالص است، که باعث حرکت تایر به سمت جلو می‌شود. نیروی مقاوم غلتشی و نیروی کشش نیز در خلاف حرکت تایر به آن اعمال می‌شوند که مجموع آنها با نیروی کشش ناخالص برابری می‌کند. از مطالعه شکل‌های ۸ و ۹ مشخص می‌گردد، در ابتدای مسیر که لغزش بیشتری وجود داشت، نیروهای کشش ناخالص، کشش خالص و مقاومت غلتشی بیشتری نیز برای دو تایر اندازه‌گیری شد. از طرفی تایر در ابتدای مسیر حرکت، علاوه بر تولید نیروی کشش خالص باید نیروی دالامبر (حاصل از شتاب سامانه) را نیز فراهم نماید، که سبب افزایش نیروی کشش ناخالص تولیدی برای هر دو تایر در ابتدای مسیر حرکت می‌گردد. مشخص است که نیروی مقاوم غلتشی در آزمایش تایر رادیال نسبت به بایاس مقدار کمتری می‌باشد، که این امر با توجه به بالاتر بودن خاصیت تغییر شکل بازگشت‌پذیر (ارتجاعی)^۱ در تایر رادیال نسبت به تایر بایاس و رابطه‌ی عکس آن با مقاومت غلتشی قابل توجیه است. همچنین با وجودی که سرعت بعد از عبور حدود ۶۰ سانتی‌متر ثابت می‌گردد، ولی همچنان نیروی مقاوم غلتشی و نیروی ناخالص به ثبات نرسیده‌اند؛ که دلیل اصلی آن ناهمگن بودن خاک در زیر تایر می‌باشد.

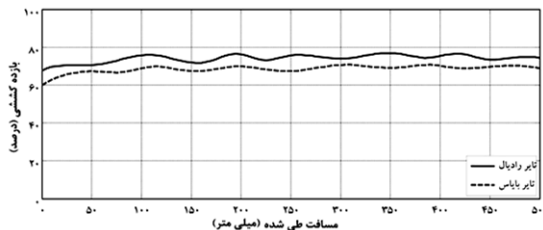


شکل ۸. نیروهای وارد بر تایر رادیال از زمان شروع تا انتهای مسیر

بازده کششی که از روابط سرعت، لغزش و نیرو تعیین شد، برای دو تایر رادیال و بایاس در شکل ۱۰ نشان داده شده

جدول ۴. اختلاف نتایج شبیه سازی و نتایج آزمون برای تایرهای رادیال و

بایاس			
خطای بازده کشش (درصد)	خطای نیروی کشش خالص (درصد)	خطای نیروی کشش ناخالص (درصد)	
۸/۴۵	۸/۶۷	۵/۷۵	تایر رادیال
۷/۳۵	۹/۱	۵/۹	تایر بایاس



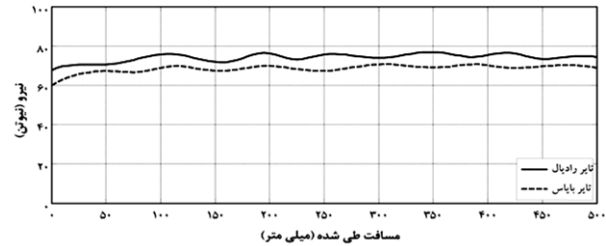
شکل ۱۳. بازده کشش تایرهای رادیال و بایاس در حالت شبه استاتیک

نتیجه گیری

در این پژوهش یک مدل اجزای محدود از تایر دو بعدی ارائه شده است. نتایج آزمایش‌های عملی نشان می‌دهد که می‌توان به نتایج این شبیه‌سازی تا حد خوبی اطمینان نمود. این مدل در شرایط یکسان با شرایط آزمایشی نتایج قابل قبولی در محاسبه نیروهای وارد بر تایرهای رادیال و بایاس را دارا می‌باشد. شبیه‌سازی یک مدل جدید برهمکنش تایر- خاک و نتایج آزمایش‌ها نشان دهنده آن است که نیروی مقاوم غلتشی برای تایر رادیال در شرایط یکسان نسبت به تایر بایاس بر روی خاک لوم- سیلتی دارای مقدار کمتری می‌باشد. همچنین برای کشش خالص یکسان، درصد لغزش در تایر بایاس اندکی بیشتر از تایر رادیال بوده ولی نیروی کشش ناخالص تغییر چندانی در دو تایر ندارد. مدل شبیه‌سازی شده تایر و خاک، قادر به پیش‌بینی شرایط مختلف تایر و خاک نیز می‌باشد، که از آن جمله می‌توان به تأثیر لغزش بر نیروهای وارد بر تایرها، اثر تغییر فشار باد بر نیروهای وارد بر تایرها و همچنین اثر نوع خاک بر نیروهای وارد بر تایرها اشاره نمود.

REFERENCES

- Aliabadi, M. H. & Brebbia, C. A. (1993). *Computational Mechanics in Contact Mechanics*. Boston: Computational Mechanics Publications.
- Belytschko, T., Liu, W. K. & Moran, B. 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Bonet, J. & Wood, R. (1997). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. USA: Cambridge University Press.
- Cui, K., De'fossez, P. & Richard, G. (2007). "A new approach for modeling vertical stress distribution



شکل ۱۲. نمودار نیروهای وارد بر تایر بایاس در حالت شبه استاتیک

به دلیل پایدار بودن شرایط و یکنواختی در مدل خاک، نمودارهای حاصل از نتایج شبیه‌سازی نسبت به نتایج آزمایش تا حد زیادی هموارتر می‌باشد. مطابق با نتایج شبیه‌سازی، مقادیر نیروی کشش ناخالص، نیروی کشش خالص و نیروی مقاوم غلتشی با مقادیر آزمایش شده اختلاف زیاد ندارند. مقادیر اختلاف نتایج شبیه‌سازی با نتایج آزمایشی در جدول ۷ آمده است. بازده کششی که از نتایج شبیه‌سازی برای تایرهای رادیال و بایاس حاصل شده است، در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. در شبیه‌سازی اجزای محدود راندمان کشش تایر رادیال، ۶/۳ درصد نسبت به تایر بایاس بیشتر است که با توجه به یافته‌های قبل و پایین بودن میزان مقاومت غلتشی در تایر رادیال قابل توجیه می‌باشد. (Regli et al. (1993) پس از شبیه‌سازی یک مدل برهمکنش تایر و خاک، به این نتیجه رسیدند که مقادیر محاسبه شده نیروهای وارد بر تایر و کشش مالبندی با مقادیر آزمایش شده در لغزش ۱۰ درصد و ۲۰ درصد با نتایج آزمون‌های عملی ارتباطی قابل قبول را نشان داد ولی در لغزش‌های بالاتر، انحراف زیادی داشت. Schmid نیز در سال ۱۹۹۵ با استفاده از نتایج تحقیق ۱۰ ساله‌ی انجمن خودرویی آلمان^۱ و ارائه‌ی یک مدل اجزای محدود، گزارش نمود که مقادیر مقادیر محاسبه شده از اندازه‌ی نیروهای تماسی، مقاومت غلتشی، نشست خاک و حتی موج خاک ایجاد شده در جلوی تایر^۲ با مقادیر حاصل از آزمایش‌های عملی مطابقت نموده است.

1. IKK
2. Bulldozing wave

at the soil/tire interface to predict the compaction of cultivated soils by using the plaxis code." *Soil & Tillage Research*, Vol. 95, pp. 277-287.

- Das, M. B. (1982). *Soil Mechanics Laboratory Manual*. Engineering Press Publishing. 250 p.
- Fervers, C.W. 2004. "Improved fem simulation model for tire-soil interaction." *Journal of Terramechanics*, Vol. 41, pp. 87-100.
- Gillespie, T. D. (1992). *Fundamental of Vehicle Dynamics*. USA: Society of Automotive Engineering, Inc.

- Hofstetter, K., Grohs, C. H., Eberhardsteiner, J. & Mang, H. A. (2006). "Sliding behavior of simplified tire tread patterns investigated by means of fem." *Computers and Structures*, Vol. 84, pp. 1151-1163.
- Limpert, R. (1992). *Brake Design and Safety*. USA: Society of Automotive Engineering, Inc.
- Limpert, R. (1992). *Brake Design and Safety*. USA: Society of Automotive Engineering, Inc.
- Matschinsky, W. (1998). *Road Vehicle Suspensions*. Berlin: Springer-Verlag, Inc.
- Matthews, F. L., Davies, G. A. O., Hitchings, D. & Soutis, C. (2000). *Finite Element Modeling of Composite Materials and Structure*. England: Woodhead Publishing Ltd.
- Matthews, F. L., Davies, G. A. O., Hitchings, D. & Soutis, C. (2000). *Finite Element Modeling of Composite Materials and Structure*. England: Woodhead Publishing Ltd.
- Mulungye, R. M., Owende, P. M. O. & Mellon, K. (2007). "Finite Element Modeling of Flexible Pavements on soft Soil Subgrades." *Materials and Design*, Vol. 28, pp. 739-756.
- Nakashima, H. & Oida, A. (2004). "Algorithm and implementation of soil-tire contact analysis code based on dynamic fe-de method." *Journal of Terramechanics*, Vol. 41, pp. 127-137.
- Owen, D. & Hinton, E. (1986). *Finite Element in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea: Pinerridge press.
- Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and shells: Theory and Analysis*. USA: CRC Press.
- Regli, G., Handke, A. & Bütikofer, M. (1993). "Material laws as a basis for simulation models for the calculation of wheel-soil interaction examination using the finite element method." *Journal of Terramechanics*, Vol. 30, pp. 165-179.
- Reimpell, J., Stoll, H. & Betzler, J. W. (2001). *The Automotive Chassis: Engineering Principles*. London: Butter Worth Heine Mann.
- Schmid, I. C. (1995). "Interaction of vehicle and terrain results from 10 years research at IKK." *Journal of Terramechanics*, Vol. 32, No. 1, pp. 3-26.
- Stoer, J. & Bulirsch, R. (1993). *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer-Verlag, Inc.
- Strivastava, A. K., Goering, C. E. & Rohrbach, R. P. (1993). *Engineering Principles of Agricultural Machines*. USA. American Society of Agricultural Engineers.
- Thompson, E. G. (2005). *An Introduction to the Finite Element Method: Theory, Programming and Application*. USA: John Wiley & Sons.
- Wong, J. Y. (2001). *Theory of Ground Vehicles*. New York: John Wiley & Sons.
- Yong, R.N, Fattah, E.A. & Boonsinsuk, P. (1978). "Analysis and prediction of tyre-soil interaction and performance using finite elements." *Journal of Terramechanics*. 15:43-63.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element MeThod: The Basis*. London: Butterworth- Heinemann.